

---

*Programme de colles*

---

**Cours :**

**I. Espace préhilbertien réel, espace euclidien**

$E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- Définition d'une forme bilinéaire symétrique, forme quadratique associée à une f.b.s, produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien.
- Norme euclidienne associée à un p.s. Inégalité de Cauchy-Schwarz (★). Inégalité de Minkowski (★).
- Identités de polarisation (★). Identités du parallélogramme (★).
- Orthogonalité :
  - Définition de  $x \perp y$ , th. de Pythagore. Orthogonale d'un ensemble.
  - Famille orthogonale, Famille orthonormale. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (★).
  - Base orthonormale : Définition, propriétés, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
  - Sommes orthogonales : Définitions. Si  $F$  est un sev de  $E$  de dim finie alors :  $E = F \oplus F^\perp$  (★).
  - Définition de projecteur orthogonale. Si  $F$  est de dim. finie alors la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  est une projection orthogonale (★).
- Distance de  $x$  par rapport à  $F$  : Définition, caractérisation.

**II. Isométrie vectoriels**

$E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev euclidien.

- Définition d'une isométrie vectoriel (automorphisme orthogonale).
- Caractérisations par la conservation de la norme, par l'image d'une base orthonormale (★).
- Définition de  $O(E)$ .
- Définition d'une matrice orthogonale, groupe orthogonal d'ordre  $n$ , groupe spécial orthogonal.
- Caractérisation par l'une des relations  ${}^tAA = I_n$  ou  $A{}^tA = I_n$ .
- Déterminant d'une matrice orthogonale
- Isométries vectorielles d'un plan euclidien
  - Détermination des matrices de  $O_2(\mathbb{R})$ , de  $SO_2(\mathbb{R})$ .
  - Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté.
  - Produit de deux matrices de rotation. Composée de deux rotations d'un plan euclidien.
- Isométries d'un espace euclidien de dimension 3
  - Réduction en base orthonormale d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3.
  - Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, axe et mesure de l'angle d'une rotation.
- $E$  est un espace euclidien orienté de dimension 3 :
  - Produit mixte : définition, propriétés.
  - Produit vectoriel : définition, propriétés (★)
- Endomorphisme symétrique : définition. Théorème spectrale.

**Exercices**

Tous les exercices des feuilles de TD n° 14 et 15.

Les démonstrations des relations de cours avec (★) peuvent faire l'objet d'une question de colle.

**Remarque :**

Les questions de cours seront notées sur 10. Ainsi un cours n'est pas appris limitera votre note à 10 sur 20 (au maximum)