
Programme de colles

Cours :

I. Séries numériques

— Rappels de cours de 1^{ère} année sur les séries numériques :

- Définition d'une série, convergence, reste d'ordre n .
- Série classiques : $\sum q^n$, séries télescopiques.
- Série réelles à termes positifs : Critères de comparaisons, règle de D'Alembert.

— Série alternés : Définition, critère spécial des séries alternées (★).

— Comparaison série-intégrale : Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[n_0, +\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), à valeurs réelles positives et décroissante. Alors :

$$\text{la série } \sum f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ existe} \quad (\star)$$

— Séries absolument convergente.

— Définition de produit de Cauchy de deux séries. Application : définition de l'exponentielle d'un nombre complexe.

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2) \quad (\star).$$

— Formule de Stirling

II. Applications linéaires

— Définition d'une application linéaire, définition de l'image, noyau d'une application linéaire.

— Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' (resp. F') est un s-e-v de E (resp. de F) alors $f(E')$ (resp. $f^{-1}(F')$) est un s-e-v de F (resp. de E) (★)

— Polynômes d'interpolation de Lagrange

— Opérations sur les applications linéaires, définition de $GL(E)$.

— Projecteur, symétrie : Définitions et propriétés. En particulier :

- Si p est un projecteur de E alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ (★).
- Si s est une symétrie de E alors $E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$ (★).

— Détermination d'une application linéaire à partir de ses restrictions sur des espaces supplémentaires. Si $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ et $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $i \in I$ alors il existe une unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u|_{E_i} = u_i$.

— Théorème du rang, applications.

— Hyperplan, formes linéaires, définition de E^* .

$$H \text{ est un hyperplan de } E \text{ ssi il existe } \varphi \in E^* \text{ non nul t.q } H = \text{Ker}(\varphi). \quad (\star)$$

Exercices

Tous les exercices des feuilles de TD n° 4 et TD n°5.

Les démonstrations des relations de cours avec (★) peuvent faire l'objet d'une question de colle.

Remarque :

Les questions de cours seront notées sur 10. Ainsi un cours n'est pas appris limitera votre note à 10 sur 20 (au maximum)