Suites réelles.

Résumé du cours

1 Rappels

Définition: *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la **suite** (u_n) **converge** ssi .*

$$\exists \ell \in \mathbb{K},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème: *Si (u_n) est une suite convergente, le vecteur ℓ précédent est unique. On l'appelle **limite** de la suite u, et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Propriété: *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Alors on a :*

1. *si $\ell < \ell'$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n < v_n$.*
2. *si il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*

Si $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < v_n$, on peut quand même avoir $\ell = \ell'$. Le passage à la limite affaiblit la relation d'ordre.

Théorème (d'encadrement): *Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles, telles que :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

Alors (v_n) est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Théorème: *Soit (u_n) une suite de réels croissante (resp.décroissante). Alors (u_n) est convergente si et seulement si elle est majorée (resp. minorée).*

Définition (Suites extraite): *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** de u toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Théorème: *Si u est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui converge vers ℓ, toute suite extraite de u converge, vers la même limite ℓ .*

Définition: *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que ces deux suites sont **adjacentes** ssi :*

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - u_n| = 0 \end{cases}$$

Théorème: *Deux suites adjacentes sont convergentes, vers la même limite.*

Remarque: *On a de plus : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $u_p \leqslant \ell \leqslant v_q$, avec inégalité stricte si les deux suites sont strictement monotones. En effet, ℓ est la borne supérieure de la suite u et la borne inférieure de la suite v.*

2 Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Il faut que cette définition ait un sens. Pour cela, si f est définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, on doit avoir $u_0 \in D$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$. Pour cela, il *suffit* que $f(D) \subset D$, c'est-à-dire que D *soit stable par* f.
On fera donc cette hypothèse dans tout ce qui suit.

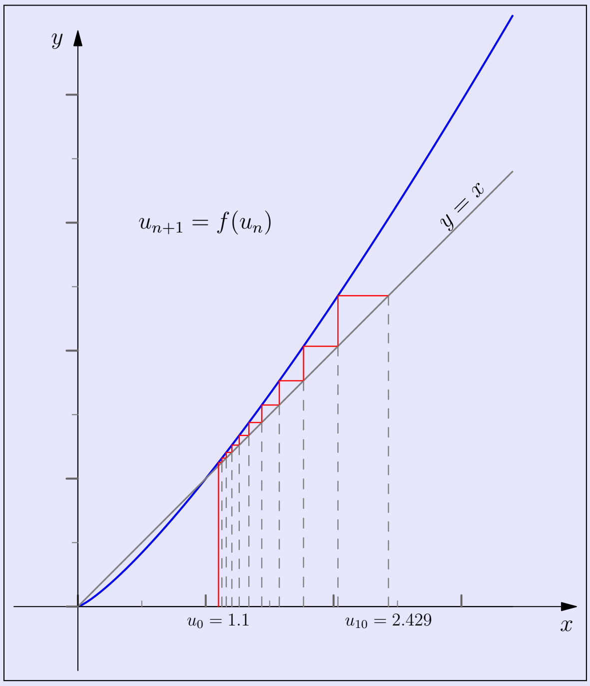
Propriété: *Si (u_n) converge vers $\ell \in D$, et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.*

■ Cas où f est croissante sur D (D stable par f)

Dans ce cas, la suite (u_n) est *monotone* (en effet, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ donc $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-1}$, donc, par récurrence, du signe de $u_1 - u_0$).
Pour étudier son sens de variation, il suffit donc de comparer u_0 et u_1. Pour cela, on peut être amené à étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
Si f est continue, la limite éventuelle de la suite est solution de l'équation $g(x) = 0$. Donc :

— si cette équation n'a pas de solution, la suite diverge.

Exemple:

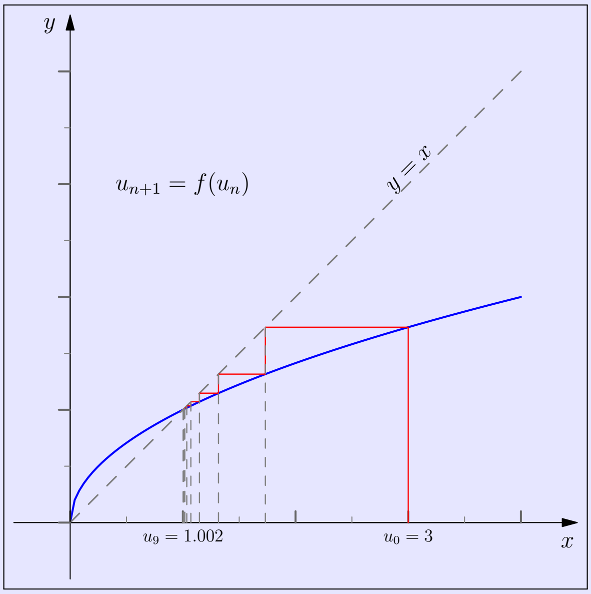


f est croissante, (u_n) ne converge pas.

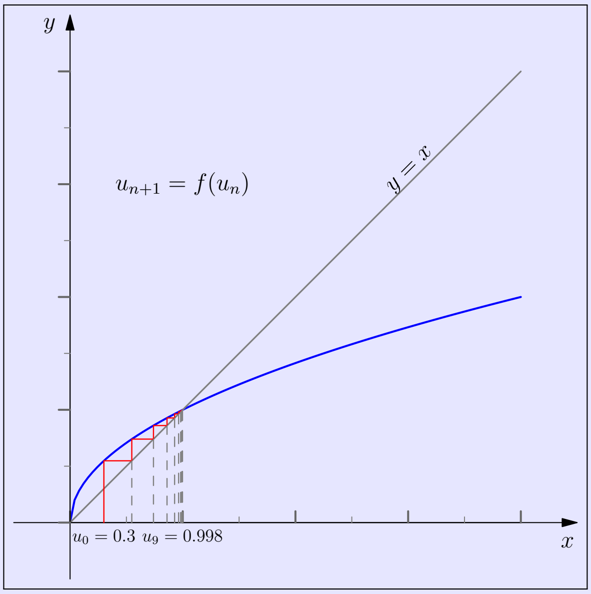
— si celle équation a une solution ℓ (elle peut en avoir plusieurs !), alors, par une récurrence simple :

- ▶ $u_0 \leqslant \ell \;\Rightarrow\; u_n \leqslant \ell$ pour tout n, et la suite est majorée.
- ▶ $u_0 \geqslant \ell \;\Rightarrow\; u_n \geqslant \ell$ pour tout n, et la suite est minorée.

Exemple:



f est croissante, (u_n) décroissante

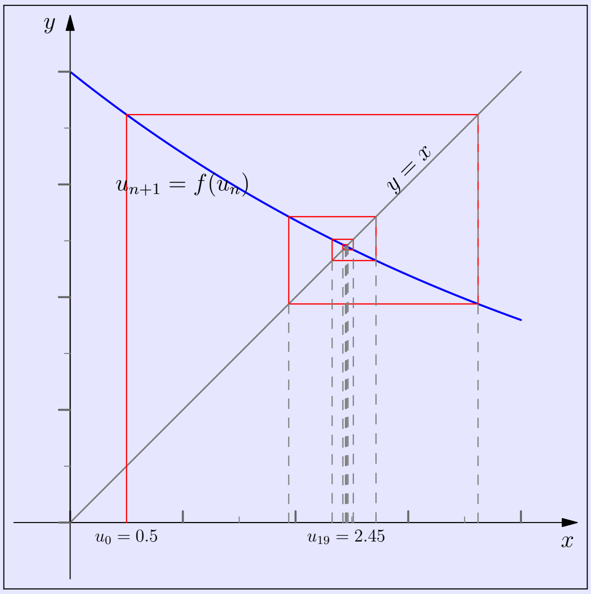


f est croissante, (u_n) croissante

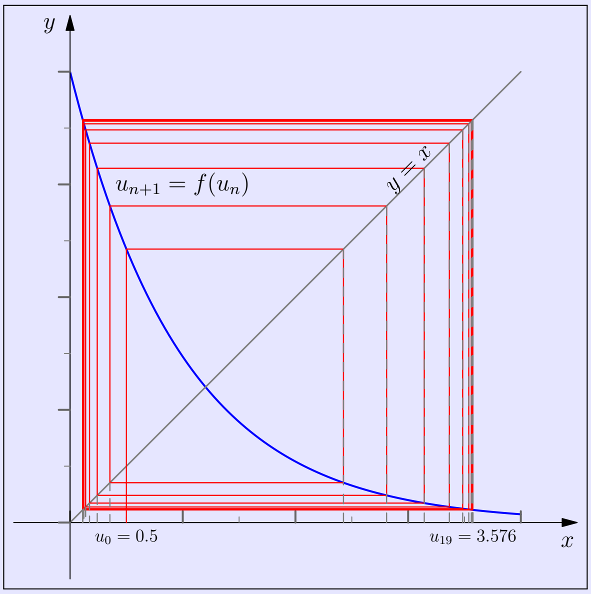
■ **Cas où f est décroissante sur D (D stable par f)**

Dans ce cas, $f \circ f$ est croissante sur D, et D est stable par $f \circ f$. On peut donc appliquer les résultats précédents aux deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
Les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont alors *monotones, de sens de variations contraires* (en effet, $u_{2n+2} - u_{2n} = f(u_{2n+1}) - f(u_{2n-1})$ est de signe contraire à $u_{2n+1} - u_{2n-1}$). Pour préciser ce sens de variation, on peut être amené à étudier la fonction $g : x \mapsto f \circ f(x) - x$.
Lorsque f est continue, si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, ce ne peut être que vers une solution de l'équation $f \circ f(x) = x$. Si c'est le cas, la suite (u_n) sera convergente si et seulement si ces deux suites extraites sont adjacentes.

Exemple:



f est décroissante, (u_n) converge



f est décroissante, (u_n) diverge

■ **Utilisation du théorème du point fixe**

Théorème (Point fixe): *Si D est un intervalle fermé borné (= segment), stable par f, et si f est contractante (lipschitzienne de rapport $k < 1$), alors, pour tout $u_0 \in D$, la suite (u_n) converge vers l'unique $\ell \in D$ tel que $f(\ell) = \ell$.*

Remarque: *Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, il faut et il suffit que $\sup_{x\in D}|f'(x)| = k < 1$.*

3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Il se peut dans certains concours (E3A 2012, CCP 2018,...) ou dans un certains exercice (algèbre, VAD..) de croiser ce type de suite.
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $b\neq 0$.

Définition: *On appelle suite* ***récurrentes linéaire d'ordre 2*** *toute suite $u\in\mathbb{R}^N$ vérifiant la relation suivante :*

$$u_0\in\mathbb{R},\, u_1\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est appelée ***l'équation caractéristique*** *associée à u.*

Pour trouver le terme générale u_n de la suite u, on cherche les racines de l'EC et en fonctions de ces racines, on obtient les éléments de la base.

Propriété:

1. *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2, alors :*

$$\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\, u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n.$$

2. *Si l'équation caractéristique admet une solution double λ, alors :*

$$\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\, u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n = (\alpha+\beta n)\,\lambda^n.$$

3. *Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles et donc conjuguées puisque $a,b\in\mathbb{R}$) $\lambda = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overline{\lambda} = r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ (avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$), alors :*

$$\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\, u_n = (\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))\,r^n.$$

Remarque: *Que faire si j'oublie ce magnifique résultat ?*
Pas de panique. On pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1}\end{pmatrix}$ et donc $V_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1\end{pmatrix}$ puis par un tour de magie, on montre que

$$\forall n\geqslant 1,\, V_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a\end{pmatrix}}_{A} V_n \Longrightarrow V_n = A^nV_0$$

Pour calculer A^n, on essaye de diagonaliser A (ou trigonaliser ce qui est toujours possible dans $\mathbb{C}$), on calcule alors

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ b & a-x\end{vmatrix} = x^2 - ax - b \qquad \text{(voyez-vous un lien avec l'EC ?)}$$

Pour bien retenir ce résultat, on peut l'associer (ou faire le parallèle) avec le résultat sur les équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y'' = ay' + by$.

4 H.P

Théorème (Théorème de Césaro): *Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers un réel $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = +\infty$.
Alors la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$$

converge aussi vers ℓ.

Démonstration : *Supposons que $\ell \in \mathbb{R}$ (dans le cas $\ell = \pm\infty$, le principe de base est le même, mais l'écriture de la définition de la limite est différente).*
Soit ε un réel strictement positif fixé. Par hypothèse :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ tq\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a $v_n - \ell = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} - \ell = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(u_k-\ell)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k(u_k-\ell)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \dfrac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k(u_k-\ell)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que les a_k sont positifs :

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k\,|u_k-\ell|}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k\frac{\varepsilon}{2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or le premier terme de cette dernière somme tend vers 0 quand $n \to \infty$, puisque le numérateur $\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|$ ne dépend pas de n et que le dénominateur $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ tend vers $+\infty$ par hypothèse. Il existe donc un entier n_1 (que l'on peut supposer $\geqslant n_0$) tel que, pour $n \geqslant n_1$, ce terme soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.
Finalement, pour $n \geqslant n_1$ on aura $|v_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui donne le résultat annoncé. ∎

Propriété: *Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers un réel $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
Alors la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

converge aussi vers ℓ.

C'est un cas particulier du théorème précédent, avec $a_k = 1$ pour tout k.

Propriété (Lemme de l'escalier): *Soit (u_n) une suite réelle telle que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.

Exemple:

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$.
3. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

On peut vérifier facilement que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Pour l'équivalent, on écrit

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + \mathrm{o}(x^4)\right),$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

donc, par le lemme de l'escalier, on a $\dfrac{1}{u_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$. On en déduit alors que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.